

# Impacto de la invención de problemas matemáticos en la metacognición

José Antonio Fernández Bravo  
Juan Jesús Barbarán Sánchez

## Resumen

Se presentan los resultados de una investigación realizada con estudiantes de 4.º de primaria en la que se analizan los efectos del uso de una metodología basada en la invención y reconstrucción de situaciones problemáticas en el aula de matemáticas sobre el desarrollo de la metacognición. Los resultados revelan que la aplicación de la metodología mejora en los estudiantes el conocimiento metacognitivo declarativo, el procedimental, el condicional y la habilidad metacognitiva de predicción. La invención de situaciones

## Abstract

*This paper presents the results of a research carried out with students of 4<sup>th</sup> year of Primary Education in which we analyze the effects of the use of a methodology based on the invention and reconstruction of problematic situations in Mathematics class, on the development of metacognition. Results indicate that the implementation of the program improves the following areas in the students: Metacognitive Declarative Knowledge, Procedural Metacognitive Knowledge, Conditional Metacognitive Knowledge and Metacognitive Ability of Prediction.*

JOSÉ ANTONIO FERNÁNDEZ BRAVO y JUAN JESÚS BARBARÁN SÁNCHEZ. Departamento de Álgebra, Facultad de Educación, Economía y Tecnología de Ceuta, Universidad de Granada, España. [barbaran@ugr.es].

*Revista Intercontinental de Psicología y Educación*, vol. 18, núm. 1-2, enero-diciembre 2016, pp. 157-177.  
Fecha de recepción: 21 de agosto de 2016 | Fecha de aceptación: 27 de septiembre de 2016.

problemáticas permite al estudiante descubrir el error y reconocerlo para evitarlo en la construcción de nuevos conocimientos; estas situaciones ayudan a ser conscientes de los procesos mentales que intervienen en el desarrollo de la tarea y la toma de decisiones para la aplicación de estrategias de resolución.

*The invention of problematic situations allows students to discover the error and to recognize it in order to avoid it in the construction of new knowledge. These situations promote the awareness of the mental processes involved in the development of the task and in the decision making for the implementation of solving strategies.*

**PALABRAS CLAVE**

Metacognición, invención de problemas, enseñanza-aprendizaje, educación, matemática

**KEYWORDS**

*Metacognition, problem posing, teaching and learning process, education, mathematics*

---

**F**lavell (1976: 232) define la metacognición como “el conocimiento que tiene uno mismo acerca de sus propios procesos y productos cognitivos o cualquier aspecto relacionado con ellos”. En tanto, Simons (1996) diseñó un modelo sobre la metacognición formado por tres componentes: conocimiento metacognitivo (declarativo, procedimental y condicional), habilidades metacognitivas<sup>1</sup> (predicción, planificación, monitorización y evaluación) y creencias metacognitivas (autoconcepto, autoeficacia, motivación, atribuciones, concepción de inteligencia y aprendizaje). El conocimiento metacognitivo es de naturaleza multidimensional y se refiere al saber y al entendimiento profundo de los procesos y productos cognitivos (Flavell, 1976); incluye las propias habilidades y estrategias cognitivas y el saber qué hacer en cada circunstancia (Flavell, 1979); en el ámbito matemático, abarca el conocimiento sobre los procesos y las técnicas propias de la disciplina y su idea sobre la naturaleza de las matemáticas. El conocimiento metacognitivo declarativo es “lo que se conoce de forma proposicional” (Jacobs y Paris, 1987: 259) o las afirmaciones sobre

---

<sup>1</sup> Estas habilidades también son descritas por Brown (1980), Lucangeli y Cornoldi (1997), Desoete, Roeyers y Buisse (2001) y Desoete y Roeyers (2002).

el mundo y el conocimiento de los factores que influyen (memoria, atención, entre otros) en el pensamiento humano. El conocimiento metacognitivo procedimental puede describirse como “el conocimiento de los procesos de pensamiento” (Jacobs y Paris, 1987: 259) o el conocimiento de los métodos para alcanzar los objetivos y el conocimiento de cómo funcionan las habilidades y cómo se van a aplicar. El conocimiento metacognitivo condicional o estratégico se considera “la conciencia de las condiciones que influyen en el aprendizaje, tales como qué estrategias son efectivas, cuándo deberían ser aplicadas, y cuándo son apropiadas” (Jacobs y Paris, 1987: 259). Estos tres conocimientos metacognitivos pueden ayudar a un niño a saber cómo estudiar un nuevo contenido (conocimiento procedimental), a hacer uso de la conciencia sobre datos numéricos antes usados (conocimiento declarativo) y a seleccionar el comportamiento de estudio apropiado (conocimiento condicional) (Desoete, Roeyers y Buysse, 2001). Sin embargo, no es suficiente contar con un buen conocimiento metacognitivo; también se necesita saber usarlo de forma efectiva (McLoughlin y Hollingworth, 2001). Utilizar dicho conocimiento de forma estratégica para alcanzar un objetivo prefijado está determinado por las habilidades metacognitivas (Schraw y Moshman, 1995; Desoete, 2008) citadas. La habilidad metacognitiva de predicción permite al sujeto predecir la dificultad de una tarea; por ejemplo, mediante la distinción de un ejercicio difícil (como la división  $236/7$ ) de uno fácil (como la resta  $236 - 7$ ). La habilidad metacognitiva de planificación involucra el análisis de los ejercicios (tal es el caso de “un ejercicio de una división en un formato de problema numérico”), recuperar conocimientos y destrezas de dominios relevantes específicos (por ejemplo, cómo hacer una división) y secuenciar estrategias de resolución de problemas (división en centenas, decenas y unidades en cálculos mentales, por mencionar alguno). Por su parte, la habilidad metacognitiva de monitorización se refiere a la conciencia del sujeto sobre la ejecución de una tarea (mediante preguntas del tipo: “¿Estoy siguiendo mi plan?” “¿Está funcionando este plan?” “¿Debería usar papel y lápiz para resolver esta división?”). Una buena forma de ilustrar esto es con la habilidad de realizar autoevaluaciones durante el proceso de aprendiza-

je (Winne, 1997); en tal sentido, la planificación es una actividad que establece submetas para la monitorización de una tarea (Winne, 1997). La habilidad metacognitiva de evaluación supone una autoevaluación de la respuesta y del proceso de obtención de ésta. La evaluación permite a los estudiantes evaluar su desempeño en la tarea, ya que pueden comparar sus resultados con los de los demás y es posible utilizar el resultado de la comparación para localizar el error en el proceso de resolución (Lucangeli, Cornoldi y Tellarini, 1998). Schoenfeld (1985) afirma que cuando un sujeto se tropieza con fallos en las técnicas de resolución de problemas, estas habilidades metacognitivas le serán muy útiles para aplicar estrategias adecuadas.

Inventar problemas es una tendencia natural del ser humano. Se refiere a la generación de nuevos problemas o a la reformulación de otros ya dados (Duncker, 1945). Chua y Yeap (2009), Kolb y Kolb (2009) y Bonotto (2010) argumentan que las habilidades metacognitivas pueden ayudar a desarrollar las capacidades de invención de problemas de los estudiantes. No obstante, como señala Silver (1994), en el aula, la invención de problemas matemáticos se utiliza en pocas ocasiones. Una cuestión que consideramos novedosa es estudiar si la invención de problemas desarrolla la metacognición en estudiantes de primaria. En esta investigación, para su aplicación en el aula, hemos seleccionado situaciones problemáticas extraídas de los metamodelos<sup>2</sup> generativos, de estructuración, de enlaces, de transformación, de composición y de interconexión contenidas en Fernández-Bravo (2010). Respecto de la invención de problemas, se utilizó el llamado *marco teórico de aprendizaje activo*, propuesto por Ellerton (2013).

La importancia de estudiar estrategias innovadoras es el desarrollo de la metacognición en los procesos de enseñanza-aprendizaje de nuestros estudiantes; por ello, esta investigación añade un nuevo enfoque a investigaciones previas sobre la metacognición (Desoete, Roeyers y Buys-

---

<sup>2</sup> Fernández-Bravo (2010) define metamodelo como el conjunto de clases de modelos de situaciones problemáticas distintas, presentadas a la actividad del estudiante y capaces de generar ideas válidas para la resolución de problemas matemáticos.

se, 2001; Özsoy y Ataman, 2009; Kaur y Areepattamannil, 2012), con estudiantes de primaria, en nuestro caso, donde la metacognición se entiende como el conocimiento metacognitivo declarativo, procedimental y condicional y como las siguientes habilidades metacognitivas: predicción, planificación, monitorización y evaluación.

El objetivo de esta investigación consiste en estudiar si el uso en el aula de actividades basadas en la invención y reconstrucción de situaciones problemáticas con estudiantes de 4.º de educación primaria desarrolla su metacognición.

Consideramos que los resultados permitirán aportar sugerencias con el fin de mejorar las técnicas pedagógicas existentes para desarrollar la metacognición en estudiantes de primaria.

## **Metodología**

El diseño que se empleó en este estudio fue cuasiexperimental comparativo de dos grupos: grupo experimental y grupo de control, sobre un total de cuatro clases de estudiantes de 4.º de primaria. Se eligieron al azar dos clases como grupo experimental y las otras dos como grupo control. La elección de los estudiantes de los grupos experimental y control fue, también, aleatoria. Como describiremos más adelante, se evaluó a los estudiantes inmediatamente después de la utilización en el aula de las situaciones problemáticas citadas y un mes después, lo que subraya en el diseño la característica: pretest-postest-retest.

### **PARTICIPANTES**

Participó un total de 104 estudiantes de 4.º de educación primaria, 55 niñas y 49 niños, todos de 9 años. Los grupos experimentales estaban formados por un total de 53 estudiantes y los grupos control por 51. Los estudiantes pertenecían a un colegio privado de la Comunidad de Madrid.

PROCEDIMIENTO

Podemos dividir el estudio en cuatro fases:

- a) Fase Pretest. Esta etapa, que se realizó en septiembre de 2013, se les administró a todos los estudiantes, de manera simultánea y en su aula habitual, la Batería Psicopedagógica EVALUA4 respecto de la comprensión lectora. Para su realización, los estudiantes contaron con un tiempo máximo de 20 minutos. Al día siguiente y continuando con el mismo protocolo de aplicación, los estudiantes realizaron el test MSA sin tiempo límite.
- b) Fase de intervención. Se efectuó mediante el uso en el aula de las situaciones problemáticas con las dos clases del grupo experimental; se cubrió en dos sesiones semanales de 50 minutos cada una, dentro del horario lectivo y en el aula correspondiente, entre octubre y abril de 2014. En total fueron 24 sesiones. El horario establecido para dichas sesiones coincidió en todos los cursos. La metodología que se empleó es el Marco Teórico de Aprendizaje Activo (Ellerton, 2013) y se describe en la figura 1; en ella, el profesor tomó como ejemplos situaciones problemáticas extraídas de Fernández-Bravo (2010):

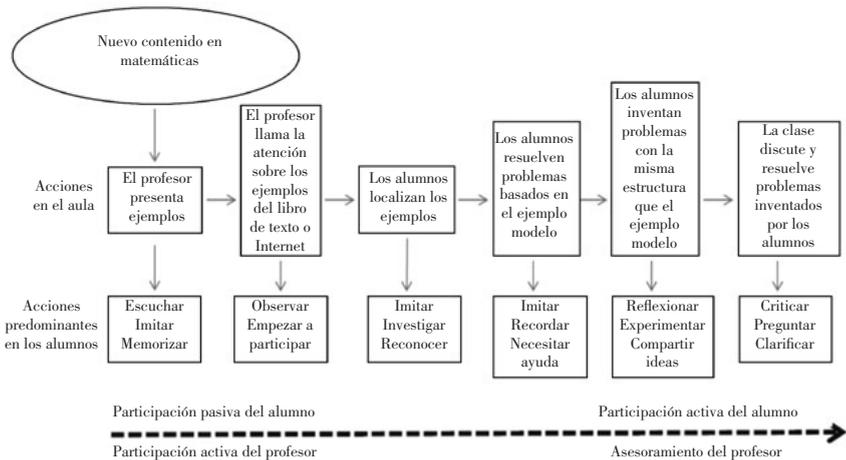


Figura 1: Marco Teórico de Aprendizaje Activo (Ellerton, 2013)

La cantidad de sesiones dedicadas a cada metamodelo aparece en la tabla 1.

**Tabla 1. Distribución de las sesiones**

<i>Metamodelo</i>	<i>Núm. de sesiones</i>
Generativo	2
Estructuración	2
Enlaces	6
Transformación	8
Composición	1
Interconexión	3

- c) Fase postest. Esta etapa se desarrolló durante la primera semana de mayo de 2014. Se aplicó el test MSA a los estudiantes, el mismo día de la semana y a la misma hora que en la fase pretest.
- d) Fase retest. Esta etapa se desarrolló durante la primera semana de junio de 2014. Se repitió lo descrito en la fase postest.

## RESULTADOS

Debido a que las puntuaciones se distribuían normalmente, según la prueba de Kolmogorov-Smirnov, para el estudio de los datos se utilizaron análisis estadísticos de tipo descriptivo y análisis intergrupos e intragrupos mediante la prueba t de Student.

Las medias y desviaciones típicas de los grupos experimental y control en las fases pretest, postest y retest, aparecen en la tabla 2.

**Tabla 2: Comparaciones intergrupo**

Variable	<i>Grupo experimental</i>		<i>Grupo control</i>		
	<i>M</i>	<i>DT</i>	<i>M</i>	<i>DT</i>	
CMD	Pretest	17.291	2.565	18.146	2.340
	Postest	21.460	1.721	18.066	2.938
	Retest	21.273	1.754	17.986	2.356
CMP	Pretest	14.286	3.098	14.361	2.870
	Postest	19.085	2.035	14.317	3.361
	Retest	18.756	1.989	14.015	2.541
CMC	Pretest	5.588	2.791	5.645	3.842
	Postest	7.956	2.479	5.721	3.692
	Retest	7.867	2.310	5.579	2.879
HMP	Pretest	11.629	3.721	11.713	2.190
	Postest	15.825	2.414	11.795	2.530
	Retest	15.167	2.542	11.658	2.965
HME	Pretest	10.211	3.616	10.535	3.420
	Postest	11.041	3.285	10.743	2.989
	Retest	10.541	2.908	10.654	2.870

En las tablas 3 y 4 aparecen los resultados del estadístico t de Student. Más concretamente:

- Las diferencias de  $\bar{x}$  entre los grupos experimental y control en la fase pretest. Se realizó la prueba t para dos muestras independientes (columna “t preinter”).
- Las diferencias de  $\bar{x}$  entre los grupos experimental y control en la fase postest. Se llevó a cabo mediante la prueba t para dos muestras independientes (columna “t post inter”).
- Las diferencias de  $\bar{x}$  entre los grupos control pretest y postest. Para ello, se utilizó la prueba t para dos muestras relacionadas (columna “t control prepost intra”).
- Las diferencias de  $\bar{x}$  entre los grupos experimentales pretest y postest. Se realizó la prueba t para dos muestras relacionadas (columna “t exp prepost intra”).

**Tabla 3: Comparación de medias en las fases pretest y postest**

Variable	<i>t pre inter</i>	Sig.	TE	<i>t post inter</i>	Sig.	TE	<i>t control prepost intra</i>	Sig.	TE	<i>t exp prepost intra</i>	Sig.	TE
cmd	0.354	0.538	0.348	3.569	0.009	1.409	1.991	0.217	0.030	3.892	0.002	1.908
CMP	1.742	0.379	0.025	2.976	0.021	2.163	1.825	0.492	0.016	3.098	0.011	1.831
CMC	0.965	0.617	0.016	2.769	0.034	0.710	0.350	0.532	0.020	2.991	0.029	0.897
HMP	1.801	0.472	0.027	2.875	0.026	1.629	1.691	0.318	0.034	2.991	0.019	1.337
HME	1.989	0.210	0.092	1.654	0.314	0.094	2.035	0.273	0.064	1.642	0.198	0.240

- Las diferencias de  $\bar{x}$  entre los grupos experimental y control en la fase retest. Se llevó a cabo mediante la prueba t para dos muestras independientes (columna “t re inter”).
- Las diferencias de  $\bar{x}$  entre los grupos control pretest y retest. Para ello, se utilizó la prueba t para dos muestras relacionadas (columna “t control prere intra”).
- Las diferencias de  $\bar{x}$  entre los grupos experimentales pretest y retest. Se realizó la prueba t para dos muestras relacionadas (columna “t exp prere intra”).

**Tabla 4: Comparación de medias en las fases pretest y retest**

Variable	<i>t re inter</i>	Sig.	TE	<i>t control pre intra</i>	Sig.	TE	<i>t exp pre intra</i>	Sig.	TE
CMD	3.365	0.029	1.582	1.679	0.314	0.068	3.002	0.018	1.812
CMP	3.099	0.012	2.077	0.372	0.521	0.127	2.701	0.042	1.717
CMC	3.014	0.010	0.876	1.898	0.402	0.019	3.613	0.003	0.889
HMP	2.865	0.038	1.270	0.946	0.627	0.021	2.985	0.023	1.110
HME	1.375	0.498	0.039	0.946	0.627	0.037	0.351	0.561	0.100

También se calculó el tamaño (TE) del efecto usando la fórmula de Cohen. Basándonos en Cohen (1988), un tamaño del efecto menor que 0.25 se considera pequeño; entre 0.25 y 0.5, medio, y mayores que 0.5, elevados.

Los datos de la tabla 3 nos indican que, para la variable *conocimiento metacognitivo declarativo* no hay diferencias significativas entre el grupo de control y el experimental en la fase pretest ( $p > 0.05$ ). Sí existen diferencias significativas entre el grupo de control y el experimental en la fase postest ( $p < 0.05$ ). Existen diferencias significativas entre el grupo experimental pretest – postest ( $p < 0.05$ ). No hay diferencias significativas entre el grupo de control ( $p > 0.05$ ). Sí hay diferencias significativas entre el grupo de control pre y el experimental post ( $p < 0.05$ ), sin haberlas entre el grupo de control post y el experimental pre. Por tanto, podemos afirmar que la metodología ha influido favorablemente en el desarrollo del conocimiento metacognitivo declarativo, revelando un efecto elevado.

Para la variable *conocimiento metacognitivo procedimental* no hay diferencias significativas entre el grupo de control y el experimental en la fase pretest ( $p > 0.05$ ). Sí existen entre el grupo de control y el experimental en la fase postest ( $p < 0.05$ ). También existen diferencias significativas entre el grupo experimental pretest-postest ( $p < 0.05$ ). No hay diferencias significativas entre el grupo de control ( $p > 0.05$ ). Sí las hay entre el grupo de control pre y el grupo experimental post ( $p < 0.05$ ), sin haberlas entre el grupo de control post y el grupo experimental pre. Con los resultados de la tabla 3, podemos afirmar que la metodología ha influido favorablemente en el desarrollo del conocimiento metacognitivo procedimental con un efecto alto.

Respecto de la variable *conocimiento metacognitivo condicional*, no se observan diferencias significativas entre el grupo de control y el experimental en la fase pretest ( $p > 0.05$ ). Sí se observan diferencias significativas entre el grupo de control y el experimental en la fase postest ( $p < 0.05$ ). Existen diferencias significativas entre el grupo experimental pretest-postest ( $p < 0.05$ ). No las hay entre el grupo de control ( $p > 0.05$ ). Sí hay diferencias significativas entre el grupo de control pre y el experimental post ( $p < 0.05$ ), sin haberlas entre el grupo de control post y el experimental pre. Al observar los datos de la tabla 3, es posible afirmar que la metodología ha influido favorablemente en el desarrollo del conocimiento metacognitivo condicional, ya que se presenta un efecto elevado.

Los resultados obtenidos en habilidad metacognitiva de predicción (tabla 3) muestran que no hay diferencias significativas entre el grupo de control y el experimental en la fase pretest ( $p > 0.05$ ). Sí existen entre el grupo de control y el experimental en la fase postest ( $p < 0.05$ ). Existen diferencias significativas entre el grupo experimental pretest-postest ( $p < 0.05$ ). No hay entre el grupo de control ( $p > 0.05$ ). Sí hay diferencias significativas entre el grupo de control pre y el experimental post ( $p < 0.05$ ), sin haberlas entre el grupo de control post y el experimental pre. Por tanto, puede afirmarse que la metodología ha influido favorablemente en el desarrollo de la habilidad metacognitiva de predicción.

Para la variable *habilidad metacognitiva de evaluación* no hay diferencias significativas entre el grupo de control pretest y el experimental pretest; tampoco las hay entre el grupo experimental pretest-postest ( $p > 0.05$ ). No existen diferencias significativas entre el grupo de control pretest-postest y entre el grupo de control post y el experimental pre ( $p > 0.05$ ). A partir de los datos de la tabla 3, podemos afirmar que el programa no ha influido para la mejora de la habilidad metacognitiva de evaluación.

Los resultados de la tabla 4 indican que en la variable *conocimiento metacognitivo declarativo* sí hay diferencias significativas entre el grupo experimental pretest-retest ( $p < 0.05$ ). No hay entre el grupo de

control pretest-retest ( $p > 0.05$ ). Existen diferencias significativas entre el grupo de control retest y el experimental retest ( $p < 0.05$ ).

Para las variables *conocimiento metacognitivo procedimental*, *conocimiento metacognitivo condicional* y *habilidad metacognitiva de predicción*, los datos indican que sí hay diferencias significativas entre el grupo experimental pretest-retest ( $p < 0.05$ ). No las hay entre el grupo de control pretest-retest ( $p > 0.05$ ). Existen diferencias significativas entre el grupo de control retest y el experimental retest ( $p < 0.05$ ).

En *habilidad metacognitiva de evaluación*, no existen diferencias significativas a 95% entre el grupo experimental pretest-retest ni entre el grupo de control pretest-retest. Tampoco existen diferencias significativas entre el grupo de control retest y el experimental retest.

Estos resultados confirman que la metodología ha influido favorablemente para la mejora del conocimiento metacognitivo declarativo, el conocimiento metacognitivo procedimental, el conocimiento metacognitivo condicional y la habilidad metacognitiva de predicción; en todos los casos, se presentan efectos elevados.

Para analizar si la comprensión lectora (CL) influyó en los resultados de esta investigación, se llevó a cabo un análisis de covarianza tomada como covariable.

**Tabla 5: Resultados del ANCOVA**

Variable	Pretest		Postest		Retest	
	F	Sig.	F	Sig.	F	Sig.
CL	2.376	0.265	2.891	0.310	3.016	0.468

Como se observa en la tabla 5, es posible afirmar que la comprensión lectora no interviene en los resultados obtenidos en ninguna de las fases consideradas.

## VARIABLES E INSTRUMENTOS

Las variables en este estudio son las que se enlistan a continuación:

- a) Variable independiente. La metodología basada en el uso de situaciones problemáticas descritas anteriormente.
- b) Variables dependientes:
  - Conocimiento metacognitivo declarativo (CMD). Exige organización y análisis de la información, así como altos niveles de flexibilidad cognoscitiva y de abstracción.
  - Conocimiento metacognitivo procedimental (CMP). Es más funcional y automatizable. Ayuda a considerar la información acerca de las diferentes acciones que deben ejecutarse en una tarea.
  - Conocimiento metacognitivo condicional (CMC). Interviene en la toma de decisiones sobre qué estrategia utilizar y en saber qué hechos y conceptos son necesarios para la tarea.
  - Habilidad metacognitiva de predicción (HMP). Ayuda a pronosticar, antes de ejecutar la tarea, la probabilidad de resolverla eficazmente.
  - Habilidad metacognitiva de evaluación (HME). Es una habilidad que se aplica después de realizar la tarea, pues consiste en una reflexión retrospectiva para valorar lo apropiado del plan, la eficacia de las estrategias y los procedimientos utilizados, comprobando los resultados.
- c) Variable interviniente. Tras la consulta con expertos y considerando que algunos estudios revelan que podría alterar significativamente los resultados (Abedi y Herman, 2010; Abedi y Lord, 2001; Beal, Adams y Cohen, 2010, y Le, 2011), consideramos la siguiente:
  - Comprensión lectora (CL). Entendida como una destreza lingüística que se refiere a la interpretación del discurso escrito.

Los instrumentos utilizados para medir las variables fueron:

- a) Metacognitive Skills and Knowledge Assessment (MSA) (Desoete, Roeyers y Buysse, 2001) para medir las variables: conocimiento declarativo, procedimental y condicional y habilidad metacognitiva de pre-

dicción, planificación, monitorización y evaluación. Este test tiene una fiabilidad  $\alpha$  de Cronbach de 0.87.

- Conocimiento metacognitivo declarativo (CMD) medido mediante 15 ítems. Los estudiantes tienen que elegir el ejercicio más fácil y el más difícil de entre cinco propuestos y seleccionar la suma, resta, multiplicación, división o problema de planteamiento más fácil o más difícil.
- Conocimiento metacognitivo procedimental (CMP) medido mediante 15 ítems. Los estudiantes tienen que explicar cómo han resuelto los ejercicios.
- Conocimiento metacognitivo condicional (CMC) medido mediante 10 ítems. Los estudiantes tienen que explicar por qué un ejercicio es fácil o difícil y se les pide que transformen un ejercicio en otro más fácil o más difícil cambiando lo menos posible. En las tres variables anteriores, los estudiantes recibieron 2 puntos por cada respuesta correcta y completa; 1 punto por cada respuesta correcta, pero incompleta; ningún punto por cualquier otra respuesta.
- Habilidad metacognitiva de predicción (HMP) medida mediante 25 ítems. Los estudiantes deben leer unos ejercicios sin resolverlos y predecir si realizarían con éxito la tarea sobre una escala de calificación de 4 posibilidades. Puede ocurrir que un estudiante haga la predicción bien y resuelva el ejercicio incorrectamente o viceversa. Las predicciones que se correspondan con el rendimiento actual en matemáticas (valorando “Estoy absolutamente seguro de que sé resolver el ejercicio correctamente” y la respuesta correcta, o valorando “Estoy absolutamente seguro de que no sé resolver el ejercicio correctamente” y la respuesta incorrecta) recibieron 2 puntos. La valoración “Estoy seguro de que sé (no sé) resolver el ejercicio correctamente” y un rendimiento en matemáticas correspondiente recibieron 1 punto.
- Habilidad metacognitiva de evaluación (HME) medida por medio de la realización de ejercicios en la misma escala de valoración que la predicción. Las respuestas se evalúan y codifican de

acuerdo con los procedimientos utilizados en la evaluación de la habilidad de predicción.

- b) Batería Psicopedagógica EVALUA4 (García y González, 1999) con una fiabilidad  $\alpha$  de Cronbach de 0.96. Con este instrumento, medimos la comprensión lectora. Los valores que puede tomar oscilan entre 0 y 33 puntos.

## **Discusión y conclusiones**

La aplicación de la metodología basada en la invención y reconstrucción de situaciones problemáticas mejora en los estudiantes de 4.º de educación primaria que han utilizado el conocimiento metacognitivo declarativo. Existen diferencias significativas entre el grupo experimental pretest-postest ( $p = 0.002$ ) y entre el grupo experimental pretest-retest ( $p = 0.018$ ). No las hay entre el grupo control pretest-postest ( $p = 0.217$ ). El conocimiento de tipo declarativo exige organización y análisis de la información, así como altos niveles de flexibilidad cognoscitiva y de abstracción (Díaz, 2005), mejora la conciencia sobre sus propias acciones (Domínguez y Espeso, 2002). Siguiendo a Osses y Jaramillo (2005), podemos decir que ayuda a los estudiantes a saber qué acciones pueden emprenderse para realizar una tarea de aprendizaje.

El conocimiento procedimental es más funcional y automatizable; ayuda a considerar la información acerca de las diferentes acciones que deben ejecutarse en una tarea (Osses y Jaramillo, 2008; Navarro 2000). La aplicación de dicha metodología mejora en los estudiantes de 4.º de primaria que han utilizado el conocimiento metacognitivo procedimental. Existen diferencias significativas ( $p = 0.011$ ) entre el grupo experimental pretest-postest y entre el grupo experimental pretest-retest ( $p = 0.042$ ). No hay diferencias significativas entre el grupo control pretest-postest ( $p = 0.492$ ).

Se observa que, respecto de la variable conocimiento metacognitivo condicional, existen diferencias significativas ( $p = 0.029$ ) entre el grupo experimental pretest-postest, y entre el experimental pretest-

retest ( $p = 0.003$ ). No las hay entre el grupo control pretest-postest ( $p = 0.532$ ). La aplicación de la metodología mejora en los estudiantes de 4.º de primaria que han utilizado el conocimiento metacognitivo condicional, ayudando a tomar decisiones sobre qué estrategia utilizar y, como expresan Vargas y Arbeláez (2002), saber qué hechos y conceptos son necesarios para la tarea; qué estrategias, heurísticas o procedimientos son apropiados y cómo aplicar la estrategia elegida, procedimiento o heurística.

La habilidad metacognitiva de predicción también se mejora con la aplicación de la metodología, lo que ayuda a pronosticar la probabilidad de resolver la tarea eficazmente antes de ejecutarla. “Al predecir, el estudiante reflexiona sobre el tipo de tarea y activa conocimientos previos relacionados con el ejercicio midiendo el grado de dificultad, lo cual le permite diferenciar entre dificultades reales o aparentes. Además, en esta fase de predicción, compara sus apreciaciones con su capacidad y habilidad para resolver el ejercicio. La predicción provoca que el alumno dirija la atención hacia el objetivo” (Miranda, Acosta, Tárraga, Fernández y Rosel, 2005: 98). Existen diferencias significativas ( $p = 0.019$ ) entre el grupo experimental pretest-postest, y entre el experimental pretest-retest ( $p = 0.023$ ). No las hay entre el grupo control pretest-postest ( $p = 0.318$ ).

No podemos afirmar que la aplicación de metodología mejore en los estudiantes de 4.º de primaria que han empleado la habilidad metacognitiva de evaluación o discriminación de la realidad. No existen diferencias significativas ( $p = 0.198$ ) entre el grupo experimental pretest-postest y entre el experimental pretest-retest ( $p = 0.561$ ). Tampoco las hay entre el grupo control pretest-postest ( $p = 0.273$ ).

Las características de las situaciones problemáticas (Fernández-Bravo, 2010; Fernández-Bravo y Barbarán, 2015) (anexo), utilizadas para el estudio del desarrollo de la metacognición, se apoyan, principalmente, en el planteamiento de cuestiones abiertas e incompletas.

La invención de situaciones problemáticas permite al alumno descubrir el error y reconocerlo para evitarlo en la construcción de nuevos conocimientos. Para el estudiante, la concienciación del error es reflexión;

para el profesor, disminución de la ignorancia que posee sobre lo que sus estudiantes desconocen. Tal conocimiento adquiere un significado que da utilidad al medio en el que se desenvuelven las relaciones de enseñanza-aprendizaje.

Cuánto más incompleta se presente una situación problemática, capaz de ser reconstruida por el alumno, mayor es la posibilidad de ser consciente de las relaciones que intervienen en su resolución, lo que mejora en el que aprendan su autonomía, observación y crítica. Estas situaciones problemáticas ayudan a ser conscientes de los procesos mentales que intervienen en el desarrollo de la tarea, así como la gradación de dificultad y la toma de decisiones para la aplicación de estrategias de resolución (conocimiento metacognitivo declarativo). Mejoran en el alumno el control sobre el proceso del aprendizaje, la planificación de acciones para la ejecución de la actividad y ayudan a gestionar la contrastación de la validez de las ideas generadas en función del objetivo (conocimiento metacognitivo procedimental).

En futuros trabajos, debería emplearse una muestra más amplia utilizando centros públicos situados en un entorno no urbano.

## **Anexo**

Presentamos algunos ejemplos de los *modelos* de situaciones problemáticas utilizados en el estudio (Fernández-Bravo, 2010; Fernández-Bravo y Barbarán, 2015).

### **MODELOS GENERATIVOS**

- *Informaciones de las que se puede deducir algo.* Se presentan informaciones, sin pregunta alguna: Puede ser una frase, una portada de un libro, un cartel publicitario, una lista de precios. La realización de la actividad consiste en deducir ideas y clasificarlas en lógicas –aquellas que son verdaderas o falsas para todos– y no lógicas; así como posibles –muy posibles, poco posibles– e imposibles.

- **Situaciones cualitativas.** Se presenta un enunciado y una pregunta con sentido lógico, pero de forma incompleta para llegar a la solución. Se va completando todo lo necesario en la medida que el estudiante lo pida.
- **Enunciados abiertos.** Se da una información al estudiante. Su labor consiste en inventar una situación problemática en la que utilice una frase, una foto, un dibujo, un esquema, un titular de un periódico, un prospecto, una programación de televisión.

### **Modelos de estructuración**

- Inventar y resolver un problema a partir de una solución dada. El estudiante creará el enunciado, la pregunta y el proceso que se pueda corresponder con la solución de partida.
- Inventar y resolver un problema a partir de una expresión matemática.
- Creación de un enunciado y pregunta que se corresponda con el contenido de relación aplicativa de la expresión de partida.
- Inventar y resolver un problema cumpliendo dos condiciones. Llegar a la solución dada y aplicar las operaciones indicadas.

### **Modelos de enlaces**

- Expresar preguntas y responderlas a partir de un enunciado dado. La labor del estudiante consiste en crear preguntas que puedan contestarse considerando sólo el enunciado de partida.
- Expresar las preguntas que se corresponden con el enunciado y la expresión matemática. Se tiene un enunciado y preguntas en blanco. Cada una de esas preguntas señala la expresión matemática que debe utilizarse en el proceso de resolución.
- Inventar un enunciado que se corresponda con una pregunta dada y el proceso de resolución dado.

### **Modelos de transformación**

- Cambiar los datos necesarios del problema, que ya ha sido resuelto, para obtener una solución dada y distinta de la que ya se obtuvo anteriormente.
- Cambiar los datos del problema, que ya ha sido resuelto, para obtener la misma solución que se obtuvo anteriormente.
- Añadir o eliminar información de un problema, que ya ha sido resuelto, para que la solución no varíe.
- Negar las proposiciones del enunciado de un problema y cambiar la pregunta para que la solución no varíe.

### **Modelos de composición**

- Cambiar las preguntas de un problema por una, y sólo una. Se presenta un problema con varias preguntas. La labor del estudiante consiste en buscar una sola, en cuyo proceso de resolución se contesten las demás.
- Completar los datos del enunciado de un problema a partir del proceso de resolución. Se presenta un problema resuelto, de cuyo enunciado se han borrado los datos y se ha dejado el espacio correspondiente para que el estudiante lo complete según corresponda.

### **Modelos de interconexión**

- Completar los datos del enunciado de un problema a partir de la solución de éste.
- Inventar un problema con un vocabulario específico y la operación/es que debe(n) utilizarse para su resolución.

## Referencias

- Abedi, J. y Herman, J. L. (2010). Assessing English language learners' opportunity to learn mathematics: Issues and limitations. *Teachers College Record*, 112, 723–746.
- Abedi, J. y Lord, C. (2001). The language factor in mathematics tests. *Applied Measurement in Education*, 14, 219–234.
- Beal, C. R.; Adams, N. M., y Cohen, P. R. (2010). Reading proficiency and mathematics problem solving by high school English language learners. *Urban Education*, 44, 58–74.
- Bonotto, C. (2010). Engaging students in mathematical modelling and problem posing activities. *Journal of Mathematical Modelling and Application*, 1 (3), 18-32.
- Brown, A. L. (1980). Metacognitive development and reading. En R. J. Spiro; B. Bruce, y W. Brewer (eds.). *Theoretical Issues in Reading Comprehension*. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.
- Chua, P. Y. y Yeap, B. H. (2009). *Problem Posing Performance of Grade 9 Students in Singapore an Open-ended Stimulus*. Singapur, National Institute of Education, Nanyang Technological University.
- Cohen, J. (1988). *Statistical Power Analysis for the Behavioral Sciences*. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.
- Desoete, A.; Roeyers, H., y Buysse, A. (2001). Metacognition and mathematical problem solving in grade 3. *Journal of Learning Disabilities*, 34 (5), 435-449.
- Desoete, A. (2008). Multi-method assessment of metacognitive skills in elementary school children: How you test is what you get. *Metacognition and Learning*, 3, 189-206.
- Díaz, P. O. (2005). Conciencia y metacognición. *Avances en Psicología Latinoamericana*, 23 (1), 85.
- Domínguez, P. y Espeso, E. (2002). El conocimiento metacognitivo y su influencia en el aprendizaje motor. *Revista Internacional de Medicina y Ciencias de la Actividad Física y el Deporte*, 2 (4), 59-68.
- Duncker, K. (1945). On problem solving. *Psychological Monographs*, 58 (5, whole number 270).
- Ellerton, N. F. (2013). Engaging pre-service middle-school teacher-education students in mathematical problem posing: development of an active learning framework. *Educational Studies in Mathematics*, 83, 87-101.
- Fernández-Bravo, J. A. (2010). *La resolución de problemas matemáticos*.

- Creatividad y razonamiento en la mente de los niños*. Madrid: Grupo Mayéutica Educación.
- Fernández-Bravo, J. A. y Barbarán, J. J. (2015). *Inventar problemas para desarrollar la competencia matemática*. Madrid: La Muralla.
- Flavell, J. H. (1976). Metacognitive aspects of problem solving. En L. B. Resnick (ed.). *The Nature of Intelligence* (231–235). Hillsdale, NJ: Erlbaum.
- (1979). Metacognition and cognitive monitoring. A new area of cognitive-developmental inquiry. *American Psychologist*, *34*, 906-911.
- García, J. y González, D. (1999). *Batería Psicopedagógica Evalúa 4*. Madrid: EOS.
- Jacobs, J. E. y Paris, S. G. (1987). Children's metacognition about reading: Issues in definition, measurement, and instruction. *Educational Psychologist*, *22*, 255-278.
- Kaur, B. y Areepattamanil, S. (2012). Influences of metacognitive and self-regulated learning strategies for reading on mathematical literacy of adolescents in Australia and Singapore. En J. Dindyal; L. P. Cheng y S. F. Ng (eds.). *Mathematics Education: Expanding Horizons*. 35<sup>th</sup> Annual Conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia. Singapur: MERGA.
- Kolb, A.Y. y Kolb, D. A. (2009). The learning way: Meta-cognitive aspects of experiential learning. *Simulation and Gaming*, *40* (3), 297–327.
- Le, L. T. (2011). *Differential Performance of Poor Readers in International Mathematics Tests by Item Formats*. Paper presented at the European conference on educational research, Berlín, Alemania.
- Lucangeli, D. y Cornoldi, C. (1997). Mathematics and metacognition: What is the nature of relationship? *Mathematical Cognition*, *3*, 121-139.
- Lucangeli, D.; Cornoldi, C., y Tellarini, M. (1998). Metacognition and learning disabilities in mathematics. En T. E. Scruggs y M. A. Mastropieri (eds.). *Advances in Learning and Behavioral Disabilities* (219-285). Greenwich: JAI Press Inc.
- McLoughlin, C. y Hollingworth, R. (2001). *The Weakest Link: Is web-based Learning Capable of Supporting Problem-solving and Metacognition?* 18<sup>th</sup> Annual Conference of the Australasian Society for Computers in Learning in Tertiary Education, 9-12 December 2001, Melbourne, Australia.
- Miranda, A.; Acosta, G.; Tárraga, R.; Fernández, M. I., y Rosel, J. (2005). Nuevas tendencias en la evaluación de las dificultades de aprendizaje de las matemáticas. El papel de la metacognición. *Revista de Neurología*, *40* (S1), 98.
- Navarro, E. B. (2000). Alfabetización emergente y metacognición. *Revista Signos*, *33* (47), 111-121.

- Osses, S. y Jaramillo, S. (2008). Metacognición: un camino para aprender a aprender. *Estudios Pedagógicos (Valdivia)*, 34 (1), 187-197.
- Özsoy, G. y Ataman, A. (2009). The effect of metacognitive strategy training on mathematical problem solving achievement. *International Electronic Journal of Elementary Education*, 1 (2), 67-82.
- Schoenfeld, A. (1985). *Mathematical Problem Solving*. San Diego, CA: Academic Press.
- Schraw, G. y Moshman, D. (1995). Metacognitive theories. *Educational Psychology Review*, 7 (4), 351-371.
- Silver, E. A. (1994). On mathematical problem posing. *For the Learning of Mathematics*, 14 (1), 19-28.
- Simons, P. R. (1996). Metacognition. En E. de Corte y F. E. Weinert (eds.). *International Encyclopedia of Developmental and Instructional Psychology* (436–441). Oxford: Elsevier Science.
- Vargas, E. y Arbeláez, C. (2002). Consideraciones teóricas acerca de la metacognición. *Revista de Ciencias Humanas UTP*, 28, 161-170.
- Winne, P. H. (1997). Experimenting to bootstrap self-regulated learning. *Journal of Educational Psychology*, 89, 1-14.